

$$x_2 - x_1 = 0,037665247 < 0,04$$

$$x^* \approx x_2 = 0,635681618$$

الحل المطلوب وفقاً لـ ٢.

٢) * أو جد بطريقة القاطع حل المعادلة:

$$x^4 - 3x^3 + x - 1 = 0$$

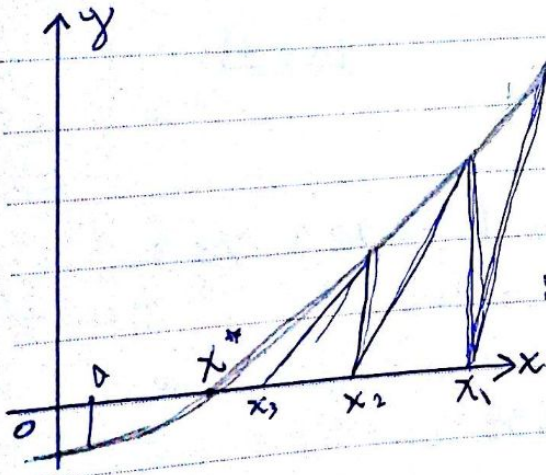
ضمن $[0,2]$

$$\epsilon = 0,005$$

٣) طريقة نيوتن - رافسون (طريقة المماسات):

6

تشبه الطريقة السابقة لكنها تعتمد على المماسات بدلاً من القاطع؛
لكن لدينا المعادلة $f(x) = 0$ ولنجد حلاً في المجال $[a, b]$ حيث أن هذه الدالة صاعدة
ومعقدة وقابلة للاشتقاق على المجال السابق؛ $y = f(x)$



نأخذ من المجال نقطة تقابل المماس للدالة؛ فيقطع هذا
المستقيم المماس المحور x في نقطة $(x_1, 0)$ نسميها التقريب
الأول.

لنوجد الآن دستوراً لهذه الطريقة باستخدام معادلة المماس:

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

عند النقطة $x = x_1$ يكون:

$$f(x_1) = y_1 = 0$$

$$0 = f(x_1) = f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0)$$

بالتقريب:

$$x_1 - x_0 = - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

وهو دستور نيوتن - رافسون في المرحلة الأولى.

وبإعادة الخطوات السابقة نرسم المماس الثاني ونوجد النقطة $(x_2, 0)$ التي تقبّل التقريب التالي ونعوض في معادلة المماس فنجد:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

وبشكل عام:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

وهو دستور نيوتن - رافسون.

ملاحظة: يجب إعطاء حل ابتدائي في هذه الطريقة.

تمرين: أوجد بطرقة نيوتن - رافسون الجذر التقريب للمعادلة التالية:

$$x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$$

في المجال $[1, 2]$ ، حيث $\epsilon = 0,001$ ، $x_0 = 2$ الحل الابتدائي

الحل: لكي يمار التقريب الأول نعوض في دستور نيوتن - رافسون السابق:

$$f(x) = 3x^2 + 2x - 3$$

$$2^3 + 2^2 - 3 \cdot 2 - 3 = 0$$

$$x = 2$$

$$f(2) = 12 + 4 - 3 = 13$$

$$8 + 4 - 6 - 3 = 12 - 9 = 3$$

$$f'(2) = 13$$

$$f'(2) = 3$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{3}{13} = 1,769230769$$

$$f(x_1) = 0,364$$

$$f'(x_1) = 9,928994083$$

نفس الطريقة نوجد التقريب الثاني:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1,73292381$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1,732051706$$

$$|x_3 - x_2| = 0,00087 < 0,001 = \epsilon \Rightarrow x^* \cong x_3 = 1,732051706$$

$$|x_n - x_{n+1}| < \epsilon \Rightarrow x^* \cong x_n$$

طريقة التقريب المتتالية : (النقطة الثابتة)

نفرض هذه الطريقة على إعادة معالجة المادة $y(x) = 0$ ، وذلك بول x في طرقة كتابة
باحتى الحدود في طرق التكرارية $y(x)$ ، أيها أن الدالة تحقق ناتج مصادقتها:

$$y(x) = 0 \quad ; \quad x = y(x)$$

والكل هو لنا حلقة نقطة تقاطع متغيرين الدالتين.

نشكل بعد ذلك المادة التكرارية التالية:

$$x_{n+1} = y(x_n)$$

نطبق حلقة ابتداء x ونفرض في المادة متحول على x
ثم نورد ونبدل x في المادة متحول على y ونستخرج هذه المرة متحول على كتبه الحدود التقريبية.

نحصل على متتالية القيم: x_0, x_1, \dots, x_n

ونفسر دافعية: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$

أيها تحقق المتراجحة:

$$x > 0 \quad \text{و} \quad x_n - x_{n+1} < \epsilon$$

$$x^* \approx x_n$$

مبرهنة: لنفرض أن الدالة $y(x)$ تحقق الشروط التالية:

1- كما كئي $x \in [a, b]$ فالدالة $y(x)$ تكون معرفة على المجال $[a, b]$ وقابلة للاشتقاق على هذا المجال

$$y(x) \in [a, b] \iff x \in [a, b]$$

$$y(x) \in [a, b] \iff x \in [a, b] \iff y(y(x)) \in [a, b]$$

عندئذ يكون:

$$1. [a, b] \subseteq [a, b] \text{ فيكون حساب القيم } x_1, x_2, \dots, x_n$$

$$2. \text{الدالة } y(x) \text{ نقطة ثابتة } y = x \text{ واحدة في المجال } [a, b] \text{ يتجلى } y(x) = x$$

$$3. [a, b] \subseteq [a, b] \text{ فاما للتتالية } (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ تكون متتالية من الحل الحقيقية.}$$

ملاحظة: كل دالة قابلة للاشتقاق هي دالة معرفة ومستمرة، لكن العكس ليس صحيحاً بالضرورة.

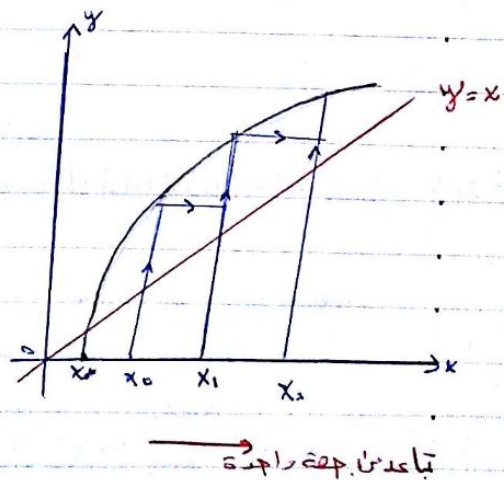
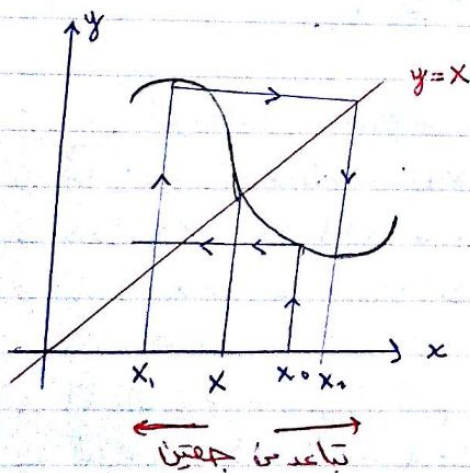
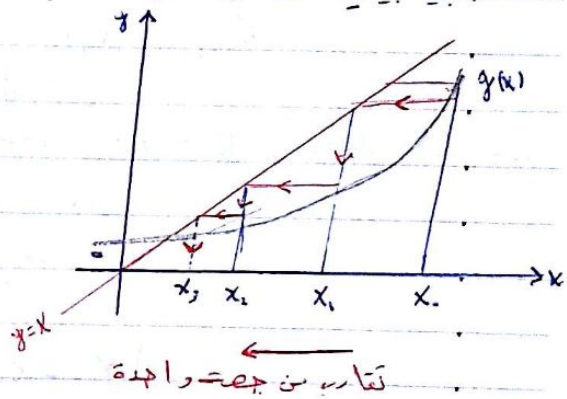
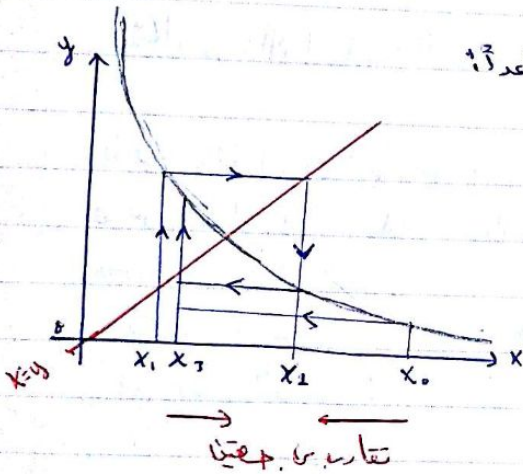
SUBJECT:

المعادلة:

بشكل عام: دالة القيمة المطلقة مفرقة ومستمرة لكنها ليست قابلة للاشتقاق.

لكي يتقارب حل المعادلة بطريقة النقطة الثابتة يجب أن تتحقق الشروط الثلاث الأولى من البرهان السابق؛ فإذا اختلف أحد هذه الشروط نقول أن متالية الحد تكون متباعدة؛ وصالح يجب أن نختار $g(x)$ بشكل مناسب.

نبدأ بياناً متى يكون الحد متقارباً ومتى يكون متباعدة؟



بالأمثلة: يمكننا استخدام الطرائق السابقة من أجل إيجاد جذور تقريبية للأعداد من أحد الأعداد كانت.

SUBJECT:

مثال: أوجد البذر التقريبي من الرتبة الرابعة للمعد 25 مع العلم أن $x_0 = 3$
 $\varepsilon = 0.0001$

الحل: نفرض أن $x = \sqrt[4]{25}$

$$x^4 - 25 = 0 \quad \leftarrow \quad x^4 = 25 \quad \leftarrow$$

وهي معادلة جبرية

$$f(x) = x^4 - 25 = 0$$

$$f'(x) = 4x^3$$

اعتماداً على الدستور:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 3 - \frac{81}{108} = 2.25$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2.25 - \frac{0.6289}{45.5625} = 2.23619$$

نتابع حتى نجد جذرين x_{n+1}, x_n بحيث $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ ، فيكون x_{n+1} هو البذر التقريبي المطلوب.

$$x_{n+1} \approx x^*$$

حل جملة معادلات جبرية:

طريقة نيوتن: لكن لدينا جملة المعادلات الجبرية لمعوقات من درجات مختلفة:

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

II

نكتب هذه الجملة بشكل مختصر:

$$f(x) = 0$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{II}$$

حل جملة المعادلات السابقة يعتمد على إيجاد حل معادلة جبرية واحدة من خلال دستور

نوتن الآتية:

$$x^{(p+1)} = x^{(p)} - w^{-1}(x^{(p)}) \cdot f(x^{(p)}) \quad [3]$$

حيث $w^{-1}(x^{(p)})$ هو مقلوب المصفوفة w في النقطة $x^{(p)}$ والمصفوفة w مصفوفة المشتقات الجزئية (جاكوبيان) $w = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)$

$$w^{-1}(x^{(p)}) = \frac{1}{|w(x^{(p)})|} \tilde{w}^T(x^{(p)}) \quad \text{أما أنا:}$$

نقول مصفوفة التمام الجبرية

$$w = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

مثال 1 أوجد لطريقة نوتن حل لمجموعة المعادلات التالية:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

$$2x^2 + y^2 - 4z = 0$$

$$3x^2 - 4y + z^2 = 0$$

حيث $\epsilon = 0.0005$ والحل الابتدائي:

$$x^0 = (x_0, y_0, z_0) = (0.5, 0.5, 0.5)$$

$$p(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0.25 + 0.25 + 0.25 - 1 \\ 2(0.25) + 0.25 - 4(0.5) \\ 3(0.25) - 4(0.5) + 0.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.25 \\ -1.25 \\ -1 \end{pmatrix}$$

الكلية

SUBJECT:

$$W(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{pmatrix}$$

ومصفوفة الجacobian:

$$= \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 4x & 2y & -4 \\ 6x & -4 & 2z \end{pmatrix}$$

وعند الحل الابتدائي:

$$W(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 2(0.5) & 2(0.5) & 2(0.5) \\ 4(0.5) & 2(0.5) & -4 \\ 6(0.5) & -4 & 2(0.5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |W(x^{(0)})| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -40 \neq 0$$

فالمصفوفة قابلة للعكس

$$W^{-1}(x^{(0)}) = -\frac{1}{40} \begin{pmatrix} -15 & -5 & -5 \\ -14 & -2 & 6 \\ -11 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{7}{20} & \frac{1}{20} & -\frac{3}{20} \\ \frac{11}{40} & -\frac{7}{40} & \frac{1}{40} \end{pmatrix}$$

بالتعويض في [3] نحصل على التقريب الأول:

$$x^{(1)} = x^{(0)} - W^{-1}(x^{(0)}) \cdot f(x^{(0)})$$

$$= \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3/8 & 1/8 & 1/8 \\ 7/20 & 1/20 & -3/20 \\ 11/40 & -7/40 & 1/40 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.25 \\ -1.25 \\ -1 \end{pmatrix}$$

SUBJECT: _____

$$\rightarrow x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,875 \\ 0,5 \\ 0,375 \end{pmatrix}$$

وبالتقريب نجد $x^{(1)}$ فنعلم على التقريب التالي:

$$x^{(2)} = x^{(1)} - w^{-1} f'(x^{(1)})$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,78981 \\ 0,49662 \\ 0,36993 \end{pmatrix}$$

وبالطريقة نفسها نجد التقريب الثالث:

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0,7852 \\ 0,4966 \\ 0,3699 \end{pmatrix}$$

ونلاحظ أن:

$$|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}| = 0,000461 < \epsilon$$

$$|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}| = 0,000021 < \epsilon$$

$$|x_3^{(3)} - x_3^{(2)}| = 0,000003 < \epsilon$$

إذاً الحل المطلوب هو $x^{(3)}$.